Champ tournant, moteurs synchrone et asynchrone.

I. Champ tournant.

Trois paires de bobines de Helmholtz ont leur axes concourant (au point O), coplanaires (plan xOy) et faisant un angle de 120° les uns avec les autres. En prenant un de ces axes comme axe Ox les vecteurs unitaires des axes des trois bobines sont :

$$\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{e_x}$$

$$\overrightarrow{e_2} = \cos(2\,\pi/3)\,\overrightarrow{e_x} + \sin(2\,\pi/3)\,\overrightarrow{e_y} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{e_x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\overrightarrow{e_y}$$

$$\overrightarrow{e_3} = \cos(4\,\pi/3)\,\overrightarrow{e_x} + \sin(4\,\pi/3)\,\overrightarrow{e_y} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{e_x} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\overrightarrow{e_y}$$

Les trois bobines sont parcourues respectivement par trois courants sinusoïdaux de même pulsation, de même amplitude mais déphasés de 120° les uns avec les autres, soit

$$I_1 = I_M\,\cos(\omega\,t) \qquad I_2 = I_M\,\cos(\omega\,t - 2\,\pi/3) \qquad I_3 = I_M\,\cos(\omega\,t - 4\,\pi/3)$$

On rappelle que chacune des bobines crée un champ quasiment uniforme, parallèle à son axe et proportionnel au courant qui la parcourt, soit

$$\overrightarrow{B_k} = \alpha\,I_k\,\overrightarrow{e_k} \qquad k \in \{1,2,3\}$$

où α est une constante dont l'expression importe peu dans cet exercice.

Question 1 :

Exprimer le champ total et montrer qu'il s'agit d'un champ «tournant» de module constant, tournant à vitesse constante autour de l'axe Oz.

On a bien sûr

$$\overrightarrow{B} = \alpha\,(I_1\,\overrightarrow{e_1} + I_2\,\overrightarrow{e_2} + I_3\,\overrightarrow{e_3}) =$$

$$\alpha\,I_M\left[\cos(\omega\,t)\,\overrightarrow{e_x} + \cos(\omega\,t - 2\,\pi/3)\left(-\frac{1}{2}\,\overrightarrow{e_x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\overrightarrow{e_y}\right) + \cos(\omega\,t - 4\,\pi/3)\left(-\frac{1}{2}\,\overrightarrow{e_x} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\overrightarrow{e_y}\right)\right] =$$

$$\alpha\,I_M\left[\cos(\omega\,t) - \frac{1}{2}\,\cos(\omega\,t - 2\,\pi/3) - \frac{1}{2}\,\cos(\omega\,t - 4\,\pi/3)\right]\overrightarrow{e_x} + \alpha\,I_M\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,[\cos(\omega\,t - 2\,\pi/3) - \cos(\omega\,t - 4\,\pi/3)]\,\overrightarrow{e_y}$$

$$= \alpha\,I_M\,[\cos(\omega\,t) - \cos(\omega\,t - 3\,\pi/3)\,\cos(\pi/3)]\,\overrightarrow{e_x} + \alpha\,I_M\,\sqrt{3}\,[\sin(\omega\,t - 3\,\pi/3)\,\sin(-\pi/3)]\,\overrightarrow{e_y}$$

$$= \alpha\,I_M\left[\cos(\omega\,t) + \cos(\omega\,t)\,\frac{1}{2}\right]\overrightarrow{e_x} + \alpha\,I_M\,\sqrt{3}\left[-\sin(\omega\,t)\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\right]\overrightarrow{e_y}$$

$$= \frac{3}{2}\,\alpha\,I_M\,[\cos(\omega\,t)\,\overrightarrow{e_x} + \sin(\omega\,t)\,\overrightarrow{e_y}]$$

ce qui est manifestement l'expression d'un champ magnétique uniforme, de module constant $B_0 = \frac{3}{2}\,\alpha\,I_M$, dans le plan xOy et faisant avec Ox un angle $\omega\,t$, donc une direction tournant avec la vitesse angulaire uniforme ω ; c'est ce qu'on appelle un champ tournant. Ce type de champ est extrêmement facile à réaliser car EDF alimente la France en courant triphasé qui donne automatiquement trois courants déphasés de 120°. Seuls les particuliers ne sont alimentés que par l'un de ces trois courants ; toutes les usines reçoivent les trois.

II. Moteur synchrone.

Un aimant permanent, dont le seul degré de liberté est une rotation autour de Oz, a un moment dipolaire magnétique de module constant $\mathfrak{M}$ et est placé dans ce champ tournant. On rappelle que le moment des forces exercées par un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ sur un dipôle $\overrightarrow{\mathfrak{M}}$ est, quelque soit le point de calcul (on parle alors d'un «couple»), $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{\mathfrak{M}} \wedge \overrightarrow{B}$.

On envisage la possibilité d'un mouvement à vitesse angulaire constante et l'on note $\omega'\, t - \theta_0$ l'angle que fait le dipôle avec Ox.

Question 2 :
Quel est le couple instantané exercé par le champ sur le dipôle et quelle est sa moyenne temporelle ? Pourquoi parle-t-on de moteur synchrone ? Quel est son inconvénient majeur ?

La lecture de l'énoncé donne

$$\overrightarrow{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}\,[\cos(\omega'\, t - \theta_0)\,\overrightarrow{e_x} + \sin(\omega'\, t - \theta_0)\,\overrightarrow{e_y}]$$

$$\overrightarrow{B} = B_0\,[\cos(\omega\, t)\,\overrightarrow{e_x} + \sin(\omega\, t)\,\overrightarrow{e_y}]$$

$$\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{\mathfrak{M}} \wedge \overrightarrow{B} = \mathfrak{M}\,B_0\,[\cos(\omega'\, t - \theta_0)\,\sin(\omega\, t) - \sin(\omega'\, t - \theta_0)\,\cos(\omega\, t)]\,\overrightarrow{e_z} = \mathfrak{M}\,B_0\,\sin[(\omega - \omega')\,t + \theta_0]\,\overrightarrow{e_z}$$

Pour la moyenne, deux cas se présentent :
– ou bien $\omega' \neq \omega$ et $\langle \Gamma_z \rangle = 0$ et le couple moyen est nul
– ou bien $\omega' = \omega$ et $\Gamma_z = \mathfrak{M}\,B_0\,\sin(\theta_0) = Cte$ et $\langle \Gamma_z \rangle = \Gamma_z = \mathfrak{M}\,B_0\,\sin(\theta_0)$

Bien sûr, puisque le moteur doit fournir un moment non nul à l'outil qu'il entraîne, il ne peut pas fonctionner si $\omega' \neq \omega$, en particulier, il ne peut pas fonctionner si $\omega' = 0$, donc *il ne peut pas démarrer* spontanément : ce type de moteur doit être muni d'un lanceur qui lui confère une vitesse initiale supérieure à ω.

Question 3 :
Comment le moteur s'adapte-t-il à l'effort à fournir (caractérisé par un couple moyen négatif) ? Montrer que le moteur cale si l'effort demandé est trop grand.

En régime quasi-permanent, la vitesse angulaire est quasi-constante, donc le somme des couples est quasi-nulle donc la moyenne du couple moteur doit être égale à la valeur absolue du couple exercée par l'outil, que nous notons ici Γ_r ; on a donc

$$\mathfrak{M}\,B_0\,\sin(\theta_0) = \Gamma_r$$

Il est clair que si Γ_r augmente, il en est de même de $\sin(\theta_0)$, donc du retard angulaire θ_0 ; comprenons par là qu'après un transitoire, le moteur tournera toujours à la même vitesse mais se sera laissé légèrement distancer par le champ tournant.

Bien sûr, on ne saurait dépasser $\sin(\theta_0) = 1$ donc Γ_r doit rester inférieur à $\Gamma_{max} = \mathfrak{M}\,B_0$: au-delà de cette limite, les billets ne sont plus valables et le moteur cale.

III. Moteur asynchrone.

On place une petite bobine constituée de N spires de surface S de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ dans un champ magnétique uniforme tournant $\overrightarrow{B}$ de norme B_0 constante et dont la direction, de vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$, reste dans le plan xOy et fait avec Ox l'angle $\omega\, t$. On envisage pour la bobine la possibilité d'une rotation uniforme de son vecteur normal $\overrightarrow{n}$ dans le plan xOy, en faisant avec Ox l'angle $\omega'\, t$ avec $\omega' \neq \omega$.

Question 4 :
Calculer la tension électromotrice induite dans la bobine. On note R la résistance de la bobine et, aux fréquences utilisées (50 hZ), l'effet de son inductance peut être négligé ; calculer le courant I qui la parcourt.

Le vecteur surface total de la bobine est $N\,S\,\overrightarrow{n}$ et le flux qui la traverse dans le champ uniforme est

$$\Phi = N\,S\,B_0\,\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u} = N\,S\,B_0\,[\cos(\omega'\,t)\,\overrightarrow{e_x}+\sin(\omega'\,t)\,\overrightarrow{e_y}]\cdot[\cos(\omega\,t)\,\overrightarrow{e_x}+\sin(\omega\,t)\,\overrightarrow{e_y}] = \\ N\,S\,B_0\,[\cos(\omega'\,t)\,\cos(\omega\,t)+\sin(\omega'\,t)\,\sin(\omega\,t)] = N\,S\,B_0\,\cos[(\omega'-\omega)\,t] = \\ N\,S\,B_0\,\cos[(\omega-\omega')\,t] = N\,S\,B_0\,\cos(\Omega\,t)$$

avec $\Omega = \omega - \omega'$

L'équation électrique du circuit conduit à

$$R\,I = e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = N\,S\,B_0\,\Omega\,\sin(\Omega\,t)$$

$$I = \frac{N\,S\,B_0\,\Omega}{R}\,\sin(\Omega\,t) \qquad \text{(équation 1)}$$

Question 5 :
La bobine se comporte comme un dipôle magnétique de moment $\overrightarrow{\mathfrak{M}} = N\,S\,I\,\overrightarrow{n}$ et subit de la part du champ un couple $\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{\mathfrak{M}}\wedge\overrightarrow{B}$. Calculer la valeur moyenne de ce couple ? A quelle condition ce couple est-il moteur ? Pourquoi parle-t-on de moteur asynchrone ?

En suivant les indications de l'énoncé

$$\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{\mathfrak{M}}\wedge\overrightarrow{B} = N\,S\,I\,B_0\,\overrightarrow{n}\wedge\overrightarrow{u} = \\ N\,S\,I\,B_0\,[\cos(\omega'\,t)\,\overrightarrow{e_x}+\sin(\omega'\,t)\,\overrightarrow{e_y}]\wedge[\cos(\omega\,t)\,\overrightarrow{e_x}+\sin(\omega\,t)\,\overrightarrow{e_y}] = \\ N\,S\,I\,B_0\,[\cos(\omega'\,t)\,\sin(\omega\,t)-\sin(\omega'\,t)\,\cos(\omega\,t)]\,\overrightarrow{e_z} = \\ N\,S\,I\,B_0\,\sin[(\omega-\omega')\,t]\,\overrightarrow{e_z} = N\,S\,I\,B_0\,\sin(\Omega\,t)\,\overrightarrow{e_z} \qquad \text{(équation 2)}$$

d'où en reportant l'équation 1 dans l'équation 2

$$\Gamma_z = \frac{N^2\,S^2\,B_0^2\,\Omega}{R}\,\sin^2(\Omega\,t)$$

dont la valeur moyenne temporelle est

$$\langle\Gamma_z\rangle = \frac{N^2\,S^2\,B_0^2\,\Omega}{2\,R} = \frac{N^2\,S^2\,B_0^2\,(\omega-\omega')}{2\,R}$$

Celle-ci n'est positive que si $\Omega = \omega-\omega' > 0$ soit $\omega' < \omega$, c'est-à-dire que si la bobine tourne moins vite que le champ. La vitesse de rotation n'est pas celle du champ d'où le nom d'«asynchrone».

Question 6 :
Comment le moteur s'adapte-t-il à l'effort à fournir (caractérisé par un couple moyen négatif) ? Montrer que le moteur cale si l'effort demandé est trop grand.

Comme pour le moteur synchrone, la moyenne du couple moteur doit être égale à la valeur absolue du couple exercée par l'outil, notée Γ_r ; on a donc

$$\frac{N^2\,S^2\,B_0^2\,(\omega-\omega')}{2\,R} = \Gamma_r$$

Si Γ_r augmente, il en est de même pour $\omega - \omega'$, donc, ω étant fixé, ω' diminue. Ici, quand le couple résistant augmente, le moteur tourne moins vite.

Bien sûr, le moteur devant tourner à une vitesse positive, le couple résistant ne pourra pas dépasser la valeur :

$$\Gamma_{max} = \frac{N^2\, S^2\, B_0^2\, \omega}{2\, R}$$